DEUTSCHER KALIBRIERDIENST

DKD-3

Angabe der Messunsicherheit bei Kalibrierungen

Herausgegeben von der Akkreditierungsstelle des Deutschen Kalibrierdienstes (DKD) bei der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB).

Deutscher Kalibrierdienst (DKD)

Im DKD sind Kalibrierlaboratorien von Industrieunternehmen, Forschungsinstituten, technischen Behörden, Überwachungs- und Prüfinstitutionen zusammengeschlossen. Sie werden von der Akkreditierungsstelle des DKD bei der PTB akkreditiert und überwacht. Sie führen Kalibrierungen von Messgeräten und Maßverkörperungen für die bei der Akkreditierung festgelegten Messgrößen und Messbereiche durch. Die von ihnen ausgestellten DKD-Kalibrierscheine sind ein Nachweis für die Rückführung auf nationale Normale, wie sie von der Normenfamilie DIN EN ISO 9000 und der DIN EN ISO/IEC 17025 gefordert wird.

Kalibrierungen durch DKD-Laboratorien geben dem Anwender Sicherheit für die Verlässlichkeit von Messergebnissen, erhöhen das Vertrauen der Kunden und die Wettbewerbsfähigkeit auf dem nationalen und internationalen Markt und dienen als messtechnische Grundlage für die Mess- und Prüfmittelüberwachung im Rahmen von Qualitätssicherungsmaßnahmen.

Im DKD werden Kalibriermöglichkeiten für elektrische Messgrößen, für Länge, Winkel und weitere geometrische Größen, für Rauheit, Koordinaten- und Formmesstechnik, für Zeit und Frequenz, für Kraft, Drehmoment, Beschleunigung, Druck, Durchfluss, Temperatur, Feuchte, medizinische Messgrößen, akustische Messgrößen, optische Messgrößen, ionisierende Strahlung und weitere Messgrößen angeboten.

Veröffentlichungen: siehe Internet

Anschrift:

Deutscher Kalibrierdienst bei der
Physikalisch-Technischen Bundesanstalt

Bundesallee 100,	D-38116 Braunschweig
Postfach 33 45,	D-38023 Braunschweig
Telefon Sekretariat:	(05 31) 5 92-19 01
Fax:	(05 31) 5 92-19 05
E-Mail:	dkd@ptb.de
Internet:	www.dkd.info

Übersetzung der Publikation EAL-R2, Ed. 1, Apr. 97
„Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration“

Inhaltsverzeichnis

Nationales Vorwort

Die vorliegende Schrift ist die deutsche Fassung der 1997 erschienenen Publikation EAL-R2 „Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration“, die ihrerseits auf der Grundlage des von sieben internationalen Organisationen für Normung und Messwesen veröffentlichten „Leitfadens zur Angabe der Unsicherheit beim Messen“ erarbeitet wurde. In Ergänzung zum Originaltext wurden einige erläuternde Fußnoten angefügt.

DKD-3 dient der einheitlichen Ermittlung und Angabe von Messunsicherheiten bei Kalibrierungen und trägt damit zur Äquivalenz und zur grenzüberschreitenden Anerkennung von Kalibrierscheinen bei. Gegenüber der Ausgabe 1991 wurde die Schrift jetzt vollständig neu abgefasst. Die vorliegende Ausgabe ist in vielen Einzelheiten präziser formuliert und ohne Einschränkungen anwendbar. Bei der Mehrzahl der im DKD üblichen Kalibrierungen ist jedoch nicht zu erwarten, dass sich die jetzt ermittelten Messunsicherheiten von früheren Werten wesentlich unterscheiden werden.

Die vorliegende Schrift ist für alle im DKD akkreditierten Kalibrierlaboratorien verbindlich. Sie sollte jedoch auch außerhalb des DKD breite Anwendung finden.

Zweck

Dieses Dokument dient der Harmonisierung der Verfahren zur Ermittlung der Messunsicherheit in der European co-operation for Accreditation (EA)[1]. Es soll über die allgemeinen Grundsätze der EAL-R1[2] hinaus die spezifischen Forderungen festlegen, die an die Angabe der Messunsicherheit in den von akkreditierten Laboratorien gefertigten Kalibrierscheinen zu stellen sind, und es soll gleichzeitig die Akkreditierungsstellen bei der einheitlichen Zuweisung der kleinsten angebbaren Messunsicherheit[3] an die von ihnen akkreditierten Kalibrierlaboratorien unterstützen. Die in diesem Dokument niedergelegten Regeln gehen auf die Empfehlungen des von sieben internationalen Organisationen für Normung und Messwesen veröffentlichten *Leitfadens zur Angabe der Unsicherheit beim Messen* zurück, so dass die konsequente Anwendung der EAL-R2 die globale Akzeptanz europäischer Messergebnisse fördern wird.

Nationale Fußnoten:

[1] Im Originaltext der EAL-R2 steht hier und an verschiedenen anderen Stellen EAL (European cooperation for Accreditation of Laboratories). Die EA wurde 1997 durch den Zusammenschluss der EAL und der EAC (European Accreditation of Certification) gegründet.

[2] Im DKD umgesetzt als DKD-5

[3] Auf die wörtliche Übersetzung des Ausdrucks „best measurement capability“ ist zugunsten des im DKD eingeführten Begriffs verzichtet worden. Wie im folgenden Text näher dargelegt ist, bezeichnet die „best measurement capability“ tatsächlich die kleinste Messunsicherheit, die ein akkreditiertes Kalibrierlaboratorium in Kalibrierscheinen angeben darf. Sie wird im DKD bei der Akkreditierung in der Anlage zur Akkreditierungsurkunde festgelegt.

1 Einleitung

1.1 Dieses Dokument legt die Grundsätze und die Forderungen fest, auf denen eine Ermittlung der Messunsicherheit bei Kalibrierungen zu gründen ist und denen die Angabe der Messunsicherheit in Kalibrierscheinen zu genügen hat. Die Betrachtungen sind allgemein gehalten, um alle Kalibrierbereiche einzubeziehen. Falls erforderlich, kann das dargestellte Verfahren in den verschiedenen Bereichen durch detailliertere Vorgaben ergänzt werden, damit die Informationen leichter umgesetzt werden können. Bei der Entwicklung dieser ergänzenden Richtlinien sind die in diesem Dokument zusammengestellten allgemeinen Grundsätze zu befolgen, damit die Harmonisierung zwischen den verschiedenen Bereichen sichergestellt ist.

1.2 Die in diesem Dokument dargestellte Behandlung entspricht dem *Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement)*, der erstmals 1993 im Auftrag vom BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP und OIML veröffentlicht wurde [1]. Während jedoch [1] so allgemein gültige Regeln für die Ermittlung und Angabe der Messunsicherheit festlegt, dass sie in allen Bereichen physikalischer Messungen befolgt werden können, zielt dieses Dokument auf die für Messungen in Kalibrierlaboratorien geeignetste Methode und beschreibt ein eindeutiges, harmonisiertes Verfahren zur Ermittlung und Angabe der Messunsicherheit bei Kalibrierungen. Es umfasst die folgenden Gebiete:

- für das Dokument wesentliche Definitionen,
- Verfahren für die Ermittlung der Messunsicherheit der Eingangsgrößen der Auswertung,
- Beziehung zwischen der Messunsicherheit der Ergebnisgröße und der Messunsicherheit der Eingangsgrößen der Auswertung,
- erweiterte Messunsicherheit der Ergebnisgröße,
- Angabe der Messunsicherheit,
- Anweisung zur schrittweisen Bestimmung der Messunsicherheit.

Ausgearbeitete Beispiele für die Anwendung des hier dargestellten Verfahrens für einige spezielle Messprobleme aus verschiedenen Bereichen werden in späteren Ergänzungen veröffentlicht werden. Die Ermittlung der Messunsicherheit wird auch in mehreren EAL-Dokumenten behandelt, die Angaben über Kalibrierverfahren enthalten; einige dieser Dokumente enthalten spezifische, ausgearbeitete Beispiele.

1.3 In der EA wird die kleinste angebbare Messunsicherheit (auf eine spezielle Größe, die Messgröße, bezogen) als die kleinste Messunsicherheit definiert, die ein Laboratorium im Rahmen seiner Akkreditierung erreichen kann, wenn es mehr oder weniger routinemäßige Kalibrierungen durchführt von

- nahezu idealen Normalen, mit denen die Einheit der betreffenden Größe oder eines oder mehrerer ihrer Werte definiert, dargestellt, bewahrt oder reproduziert werden, oder
- nahezu idealen Messgeräten, die für die Messung der betreffenden Größe eingesetzt werden.

Die Einschätzung der kleinsten angebbaren Messunsicherheit akkreditierter Kalibrierlaboratorien muss einerseits von dem in diesem Dokument dargestellten Verfahren der Auswertung ausgehen, andererseits normalerweise durch experimentelle Nachweise gestützt oder abgesichert werden. Zur Unterstützung der Akkreditierungsstellen bei der Beurteilung der kleinsten angebbaren Messunsicherheit sind in Anhang A detaillierte Erläuterungen zusammengestellt.

2 Beschreibung und Definitionen

Anmerkung: Begriffe, die für den Haupttext von besonderer Bedeutung sind, sind kursiv gedruckt, wenn sie in diesem Dokument zum ersten Mal erscheinen. Anhang B enthält ein Glossar dieser Begriffe und Verweise auf die Dokumente, aus denen die Definitionen übernommen worden sind.

2.1 Die Angabe eines Messergebnisses ist nur dann vollständig, wenn sie sowohl den der Messgröße durch die Messung zugewiesenen Wert als auch die mit dieser Zuweisung verbundene Messunsicherheit enthält. In diesem Dokument werden alle Größen, deren Wert nicht genau angegeben werden kann, als *Zufallsvariable* behandelt. Hierunter fallen auch alle Einflussgrößen, die sich auf den Messwert auswirken können.

2.2 Die *Messunsicherheit* ist ein Parameter, der mit dem Messergebnis verbunden ist und der die Streuung der Werte charakterisiert, die der Messgröße vernünftigerweise beigeordnet werden können [2][4]. Sofern keine Missverständnisse zu erwarten sind, wird „Messunsicherheit“ auch einfach „Unsicherheit“ genannt. Typische Ursachen für Unsicherheiten bei Messungen sind in der Liste in Anhang C aufgeführt.

2.3 *Messgrößen* sind jene speziellen Größen, deren Wert durch eine Messung bestimmt werden soll. Bei Kalibrierungen hat man es gewöhnlich mit nur einer Messgröße, auch *Ergebnisgröße Y* der Auswertung genannt, zu tun, die über die Beziehung

$$Y = f(X_1, X_2, .., X_N) \tag{2.1}$$

mit den *Eingangsgrößen* X_i $(i = 1,2,..,N)$ der Auswertung zusammenhängt. Die Modellfunktion f beschreibt zugleich das Messverfahren und das Verfahren der Auswertung. Sie gibt an, wie Werte der Ergebnisgröße Y aus Werten der Eingangsgrößen X_i gewonnen werden. In den meisten Fällen wird sie aus einem analytischen Ausdruck bestehen, sie kann sich aber auch aus einer Gruppe solcher Ausdrücke zusammensetzen, die Korrektionen und Korrektionsfaktoren für systematische Effekte einschließen, und so zu einer komplexeren Beziehung führen, die nicht in einer einzelnen Funktion ausgedrückt werden kann. Darüber hinaus kann f auch experimentell ermittelt oder als Computeralgorithmus gegeben sein, mit dem die numerische Auswertung der Messung vorgenommen wird, oder sie kann sich als Kombination aus allen diesen Formen zusammensetzen.

[4] Nationale Fußnote: Die Messunsicherheit ist das quantitative Maß der Unkenntnis der Messgröße und ist von der Messabweichung zu unterscheiden.

2.4 Je nach der Art, wie die Werte und die ihnen beigeordnete Messunsicherheit ermittelt wurden, werden die *Eingangsgrößen* X_i in die folgenden beiden Kategorien eingeteilt:

(a) Größen, deren Schätzwert einschließlich der ihm beizuordnenden Messunsicherheit unmittelbar in der laufenden Messung bestimmt wird. Diese Werte können z.B. aus einer einzelnen Beobachtung oder aus wiederholten Beobachtungen gewonnen sein oder aus der jeweiligen experimentellen Erfahrung stammen. Sie können die Festlegung der Korrektionen von Geräteanzeigen sowie der Korrektionen bezüglich der Einflussgrößen wie Umgebungstemperatur, Luftdruck oder Feuchtigkeit einschließen;

(b) Größen, deren Schätzwert einschließlich der ihm beizuordnenden Messunsicherheit nicht unmittelbar in der laufenden Messung bestimmt wird, sondern äußeren Quellen entnommen wird, wie z.B. durch kalibrierte Normale oder zertifizierte Referenzmaterialien realisierte Größen oder Referenzdaten aus Handbüchern.

2.5 Der Schätzwert der Messgröße Y, der mit y bezeichnete *Schätzwert der Ergebnisgröße,* wird aus Gleichung (2.1) durch Einsetzen der Schätzwerte x_i der Eingangsgrößen der Auswertung X_i gewonnen:

$$y = f(x_1, x_2, .., x_N) \tag{2.2}$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass die Eingangswerte in dem Sinne beste Schätzwerte der Eingangsgrößen sind, dass sie in bezug auf die für das Modell bedeutsamen Einflüsse und Effekte geeignet korrigiert wurden. Ist das nicht der Fall, müssen die erforderlichen Korrektionen als getrennte Eingangsgrößen in das Modell der Auswertung eingeführt werden.[5]

2.6 Für die in der Auswertung einer Messung auftretenden Zufallsvariablen wird die *Varianz* ihrer Verteilung oder die positive Quadratwurzel daraus - *Standardabweichung* genannt - als Maß für die in 2.2 beschriebene Streuung der Werte verwendet. Die dem Schätzwert y der Messgröße beizuordnende *Standardmessunsicherheit* $u(y)$ ist die Standardabweichung der Messgröße Y. Sie wird aus den Schätzwerten x_i der Eingangsgrößen X_i und den ihnen beigeordneten Standardmessunsicherheiten $u(x_i)$ ermittelt. Die dem Schätzwert einer Messgröße beigeordnete Standardmessunsicherheit hat dieselbe Dimension wie der Messwert. In manchen Fällen ist es sinnvoll, die *relative Standardmessunsicherheit* zu verwenden. Sie ist die einem Schätzwert beigeordnete Standardmessunsicherheit, dividiert durch den Betrag des Schätzwertes, und daher dimensionslos. Ihre Verwendung ist nicht möglich, wenn der Schätzwert gleich Null ist.

[5] Nationale Fußnote: Korrektionsgrößen sind - wie andere Eingangsgrößen auch - nie genau bekannt. Sie können bei der Unsicherheitsanalyse nur außer acht gelassen werden, wenn sie sehr genau bekannt sind, d.h. ihr Unsicherheitsbeitrag gegenüber anderen Unsicherheitsbeiträgen vernachlässigt werden kann.

3 Ermittlung der den Eingangsschätzwerten beizuordnenden Messunsicherheit

3.1 Allgemeine Betrachtungen

3.1.1 Die den Schätzwerten der Eingangsgrößen beizuordnende Messunsicherheit wird nach der Ermittlungsmethode vom Typ A oder Typ B bestimmt. Die *Typ A Methode zur Ermittlung der Standardmessunsicherheit* ist die Methode, bei der die Messunsicherheit durch statistische Analyse einer Beobachtungsreihe ermittelt wird. In diesem Fall ist die Standardmessunsicherheit die empirische Standardabweichung des Mittelwertes, der durch ein Mittelungsverfahren oder eine geeignete Regressionsanalyse gewonnen wird. Die *Methode B zur Ermittlung der Standardmessunsicherheit* ist die Methode, bei dem die Messunsicherheit auf andere Weise als durch die statistische Analyse einer Beobachtungsreihe ermittelt wird. In diesem Fall basiert die Ermittlung auf anderen, messtechnisch fundierten Kenntnissen.

Anmerkung: In der Messtechnik treten manchmal Fälle auf - bei Kalibrierungen jedoch äußerst selten -, in denen die möglichen Werte einer Größe nur auf einer Seite eines begrenzenden Wertes liegen. Ein bekannter Fall dieser Klasse ist der sogenannte Kosinusfehler. Die Behandlung dieser Sonderfälle ist in [1] angegeben.

3.2 Typ A Methode zur Ermittlung der Standardmessunsicherheit

3.2.1 Die Methode A zur Ermittlung der Standardmessunsicherheit wird angewendet, wenn für eine der Eingangsgrößen X_i unter den gleichen Messbedingungen n unabhängige Beobachtungen vorgenommen wurden. Besitzt das Messverfahren eine ausreichende Auflösung, so weisen die gewonnenen Werte i.a. eine beobachtbare Streuung auf.

3.2.2 Ist die wiederholt gemessene Eingangsgröße X_i die Größe Q und wurden n statistisch unabhängige Beobachtungen $(n > 1)$ durchgeführt, so ist der Schätzwert $\overline{q}$ der Größe Q der *arithmetische Mittelwert* oder *Durchschnittswert* der einzelnen, beobachteten Werte q_j $(j = 1,2,..,n)$:

$$\overline{q} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} q_j \qquad (3.1)$$

Die dem Schätzwert $\overline{q}$ beizuordnende Standardmessunsicherheit ist nach einem der folgenden Verfahren zu ermitteln:

(a) Die Varianz der den Beobachtungen zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung[6] wird durch die *empirische Varianz* $s^2(q)$ der Werte q_i geschätzt, die gegeben ist durch

$$s^2(q) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} (q_j - \overline{q})^2 \qquad (3.2)$$

[6] Nationale Fußnote: Genau genommen handelt es sich hier um eine Häufigkeitsverteilung.

Ihre (positive) Quadratwurzel wird *empirische Standardabweichung* der Einzelmessung genannt. Der beste Schätzwert der Varianz des arithmetischen Mittelwertes $\overline{q}$ ergibt sich hieraus als die *empirische Varianz des Mittelwertes*. Sie ist gegeben durch

$$s^2(\overline{q}) = \frac{s^2(q)}{n} \tag{3.3}$$

Ihre (positive) Quadratwurzel wird *empirische Standardabweichung des Mittelwertes* genannt. Die dem Schätzwert $\overline{q}$ beizuordnende Standardmessunsicherheit $u(\overline{q})$ ist die empirische Standardabweichung des Mittelwertes

$$u(\overline{q}) = s(\overline{q}) \tag{3.4}$$

Warnung: Ist die Anzahl n der wiederholten Beobachtungen klein ($n < 10$), muss die Verlässlichkeit des Wertes der Standardmessunsicherheit, die nach Methode A - wie in Gleichung (3.4) ausgedrückt - berechnet wurde, in Betracht gezogen werden. Kann die Anzahl n der Beobachtungen nicht erhöht werden, müssen die anderen, im weiteren Text beschriebenen Verfahren zur Ermittlung der Standardmessunsicherheit in Erwägung gezogen werden.

(b) Ist für eine Messung nach einem wohl-definierten Messverfahren, die unter statistischer Kontrolle durchgeführt wird, eine *kombinierte* oder *zusammengefasste Ermittlung der Varianz* s_p^2 der Einzelmessung verfügbar, so wird sie u.U. die Varianz der den Beobachtungen zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung besser beschreiben als die im Einzelfall aus einer kleineren begrenzten Anzahl von Beobachtungen geschätzte empirische Varianz der Einzelmessung. Wird der Wert der Eingangsgröße Q in diesem Fall als arithmetisches Mittel $\overline{q}$ der kleineren Anzahl n von statistisch unabhängig wiederholten Beobachtungen ermittelt, so kann die Varianz des Mittelwertes durch

$$s^2(\overline{q}) = \frac{s_p^2}{n} \tag{3.5}$$

geschätzt werden. Die Standardmessunsicherheit, die dem Mittelwert beizuordnen ist, ist dann wiederum nach Gleichung (3.4) zu ermitteln.

3.3 Typ B Methode zur Ermittlung der Standardmessunsicherheit

3.3.1 Bei der Ermittlung der Standardmessunsicherheit nach Methode B wird die dem Schätzwert x_i der Eingangsgrößen X_i beizuordnenden Messunsicherheit nach einer Methode ermittelt, die nicht aus der statistischen Analyse einer Beobachtungsreihe besteht. Die Standardmessunsicherheit $u(x_i)$ wird dabei durch messtechnisch begründete Beurteilung der Variabilität[7] der Eingangsgröße X_i unter Berücksichtigung der verfügbaren Informationen gewonnen. Zu dieser Kategorie gehörende Werte sind:

[7] Nationale Fußnote: Hier ist nicht die Variabilität gemeint, die aufgrund einer unzureichenden Kontrolle einiger Messbedingungen auftreten kann. Sie ist Ursache der bei wiederholten Beobachtungen auftretenden Streuung der Werte und wird durch die Typ A Methode zur Ermittlung der Standardmessunsicherheit erfasst. Gemeint ist die auf der ungenauen Kenntnis der betreffenden Eingangsgröße zurückgehende Variabilität bei der Auswertung.

- Werte aus anderen, früher durchgeführten Messungen,
- Erfahrungen mit oder allgemeine Kenntnisse über das Verhalten und die Eigenschaften eingesetzter Materialien oder Geräte,
- Herstellerangaben,
- in Kalibrierscheinen oder anderen Bescheinigungen angegebene Werte,
- Messunsicherheiten, die Referenzwerten aus Handbüchern beigeordnet sind.

3.3.2 Eine sinngemäße Verwendung der verfügbaren Information für die Ermittlung der Standardmessunsicherheit nach Methode B ist nur möglich, wenn ausreichende Erfahrung und allgemeine Kenntnisse vorhanden sind. Sie ist eine Fertigkeit, die in der messtechnischen Praxis erlernt wird. Eine gut fundierte Ermittlung der Standardmessunsicherheit nach Methode B wird genau so verlässlich sein wie eine Ermittlung nach Methode A, insbesondere in Situationen, in denen die Ermittlung nach Methode A nur auf einer verhältnismäßig geringen Anzahl von statistisch unabhängigen Beobachtungen beruht. Es ist zwischen den folgenden Fällen zu unterscheiden:

(a) Ist nur ein *Einzelwert* für die Größe X_i bekannt, z.B. ein einzelner Messwert, ein sich aus einer früheren Messung ergebender Wert, ein Referenzwert aus der Literatur oder eine Korrektion, so ist dieser Wert als Schätzwert x_i einzusetzen. Ist auch die dem Wert x_i beigeordnete Standardmessunsicherheit $u(x_i)$ gegeben, ist sie zu verwenden. Anderenfalls ist die Standardmessunsicherheit aus unzweideutigen Werten der Messunsicherheit zu berechnen. Sind auch Daten dieser Art nicht verfügbar, muss ein Wert für die Standardmessunsicherheit empirisch abgeschätzt werden.

(b) Kann für die Größe X_i auf theoretischer oder empirischer Grundlage eine *Wahrscheinlichkeitsverteilung* angenommen werden, so sind der Erwartungswert und die Quadratwurzel der Varianz dieser Verteilung als Schätzwert x_i bzw. die ihm beigeordnete Standardmessunsicherheit $u(x_i)$ zu verwenden.

(c) Können für den Wert der Größe X_i nur *Ober*- und *Untergrenzen* a_+ und a_- abgeschätzt werden (z.B. Herstellerangaben über ein Messgerät, ein Bereich der Unbestimmtheit einer Temperatur, ein Rundungs- oder Abschneidefehler aufgrund einer automatischen Datenvorverarbeitung), so ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte zwischen den Grenzwerten (rechteckige Wahrscheinlichkeitsdichte) für die Unbestimmtheit der Eingangsgröße X_i anzunehmen. Dieser häufige Sonderfall des obigen Falles b) führt zu

$$x_i = \frac{1}{2}(a_+ + a_-) \tag{3.6}$$

für den Schätzwert der Eingangsgröße X_i und zu

$$u^2(x_i) = \frac{1}{12}(a_+ - a_-)^2 \tag{3.7}$$

für das Quadrat der X_i beizuordnenden Standardmessunsicherheit. Wird die Differenz zwischen den Grenzwerten mit $2a$ bezeichnet, kann Gleichung (3.7) auch in der Form

$$u^2(x_i) = \frac{1}{3}a^2 \tag{3.8}$$

geschrieben werden. Die rechteckige Wahrscheinlichkeitsdichte ist die adäquate wahrscheinlichkeitstheoretische Beschreibung des Kenntnisstandes, wenn außer den Grenzen der Variabilität über die Werte der Eingangsgröße X_i nichts weiter bekannt ist. Kann man aber annehmen, dass Werte der betreffenden Größe in der Nähe der Mitte des Variabilitätsbereiches wahrscheinlicher sind als Werte nahe den Grenzen, so wird eine Dreieck- oder Normalverteilung ein besseres Modell darstellen. Andererseits kann eine U-förmige Verteilung zweckmäßiger sein, wenn Werte nahe den Grenzen wahrscheinlicher als Werte in der Nähe der Mitte sind.

4 Ermittlung der dem Schätzwert der Ergebnisgröße beizuordnenden Standardmessunsicherheit

4.1 Für unkorrelierte Eingangsgrößen ist das Quadrat der dem Schätzwert y der Ergebnisgröße beizuordnenden Standardmessunsicherheit gegeben durch

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y) \quad . \tag{4.1}$$

Anmerkung: Es gibt in der Messtechnik auch Fälle, die bei Kalibrierungen selten angetroffen werden, in denen die Modellfunktion stark nichtlinear ist oder einige der Sensitivitätskoeffizienten [siehe Gleichungen (4.2) und (4.3)] verschwinden. Es müssen dann Glieder höherer Ordnung in die Gleichung (4.1) eingeführt werden. Eine Behandlung dieser Sonderfälle ist in [1] angegeben.

$u_i(y)\ (i = 1,2,..,N)$ ist derjenige Beitrag zur Standardmessunsicherheit, die dem Schätzwert y der Ergebnisgröße beizuordnen ist, der sich bei gegebenem Schätzwert x_i der Eingangsgröße X_i aus der dem Schätzwert beigeordneten Standardmessunsicherheit ergibt:

$$u_i(y) = c_i u(x_i) \tag{4.2}$$

c_i ist der zu dem Eingangsschätzwert x_i gehörende *Sensitivitätskoeffizient*, das ist die partielle Ableitung der Modellfunktion f nach X_i, berechnet für die Eingangsschätzwerte x_i :

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{X_1 = x_1 .. X_N = x_N} \tag{4.3}$$

4.2 Der Sensitivitätskoeffizient c_i beschreibt, in welchem Maße der Schätzwert y der Ergebnisgröße durch Änderungen des Schätzwertes x_i der Eingangsgröße X_i beeinflusst wird. Er kann aus der Modellfunktion f mit Hilfe von Gleichung (4.3) oder mit numerischen Methoden ermittelt werden, d.h. indem die Änderungen des Schätzwertes y für Änderungen des Schätzwertes x_i um $+u(x_i)$ und $-u(x_i)$ berechnet und die sich ergebende Differenz in y, dividiert durch $2u(x_i)$, als Wert des Sensitivitätskoeffizienten c_i verwendet wird. In manchen Fällen wird man die Änderung des Schätzwertes y der Ergebnisgröße zweckmäßiger Weise experimentell bestimmen, indem man die Messung z.B. bei den beiden Werten $x_i + u(x_i)$ und $x_i - u(x_i)$ wiederholt und dann wie bei der numerischen Berechnung vorgeht.

4.3 Während $u(x_i)$ stets positiv ist, kann der Unsicherheitsbeitrag $u_i(y)$ nach Gleichung (4.2) je nach dem Vorzeichen des Sensitivitätskoeffizienten c_i positive oder negative Werte annehmen. Im Falle korrelierter Eingangsgrößen muss das Vorzeichen von $u_i(y)$ berücksichtigt werden; siehe Gleichung (D4) in Anhang D.

44 Ist die Modellfunktion f eine Summe oder Differenz der Eingangsgrößen X_i:

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_N) = \sum_{i=1}^{N} p_i X_i \tag{4.4}$$

so ist auch der Schätzwert der Ergebnisgröße gemäß Gleichung (2.2) als entsprechende Summe oder Differenz der Schätzwerte der Eingangsgrößen

$$y = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i \tag{4.5}$$

gegeben. Die Sensitivitätskoeffizienten sind dann gleich p_i und Gleichung (4.1) geht in

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 u^2(x_i) \tag{4.6}$$

über.

4.5 Ist die Modellfunktion f ein Produkt oder Quotient der Eingangsgrößen X_i:

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_N) = c\prod_{i=1}^{N} X_i^{p_i} \tag{4.7}$$

so ist der Schätzwert der Ergebnisgröße wiederum ein entsprechendes Produkt oder ein Quotient der Schätzwerte der Eingangsgrößen

$$y = c\prod_{i=1}^{N} x_i^{p_i} \tag{4.8}$$

In diesem Fall sind die Sensitivitätskoeffizienten gleich $p_i y / x_i$, und Gleichung (4.1) liefert einen der Gleichung (4.6) entsprechenden Ausdruck, wenn die relativen Standardmessunsicherheiten $w(y) = u(y)/|y|$ und $w(x_i) = u(x_i)/|x_i|$ verwendet werden:

$$w^2(y) = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 w^2(x_i) \tag{4.9}$$

4.6 Sind zwei Eingangsgrößen X_i und X_k zu einem gewissen Grad *korreliert*, d.h. sind sie auf die eine oder andere Weise voneinander abhängig, so muss auch ihre *Kovarianz* unter den Unsicherheitsbeiträgen berücksichtigt werden. In Anhang D ist beschrieben, wie dies zu machen ist. Inwieweit ein Effekt der Korrelationen zu berücksichtigen ist, hängt von der jeweiligen Messung, von den Kenntnissen über das Messverfahren und von der Beurteilung der wechselseitigen Abhängigkeiten der Eingangsgrößen ab. Allgemein ist zu beachten, dass die Vernachlässigung von Korrelationen zwischen den Eingangsgrößen zu einer fehlerhaften Auswertung der Standardmessunsicherheit der Messgröße führen kann.

4.7 Die den Schätzwerten zweier Eingangsgrößen X_i und X_k beigeordnete Kovarianz kann gleich Null gesetzt oder als vernachlässigbar angesehen werden, wenn

a) die beiden Eingangsgrößen X_i und X_k voneinander unabhängig sind, z.B. weil sie in verschiedenen, voneinander unabhängigen Experimenten mehrfach, aber nicht gleichzeitig beobachtet wurden oder weil sie resultierende Größen verschiedener, unabhängig voneinander durchgeführter Ermittlungen darstellen oder wenn

b) eine der Eingangsgrößen X_i und X_k als konstant angesehen werden kann oder wenn

c) es keine Anhaltspunkte für eine Korrelation zwischen den Eingangsgrößen X_i und X_k gibt.

Manchmal können Korrelationen auch durch geeignete Wahl der Modellfunktion eliminiert werden.

4.8 Die Unsicherheitsanalyse einer Messung - häufig auch Messunsicherheitsbudget genannt - sollte eine Liste aller Quellen für die Unsicherheit während der Messung zusammen mit den zugehörigen Standardmessunsicherheiten und eine Angabe enthalten, wie sie ermittelt wurden. Bei mehrfach wiederholten Beobachtungen ist auch die Anzahl n der durchgeführten Beobachtungen anzugeben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist es empfehlenswert, die für die Analyse wesentlichen Daten auch in tabellarischer Form zusammenzustellen. In der Tabelle sollte allen Größen ein physikalisches Formelzeichen X_i oder eine kurze Kennung zur Identifizierung beigeordnet werden. Für jede Größe sollte die Tabelle darüber hinaus wenigstens den Schätzwert x_i, die zugehörige Standardmessunsicherheit $u(x_i)$, den Sensitivitätskoeffizienten c_i und den Unsicherheitsbeitrag $u_i(y)$ enthalten. Für die in der Tabelle eingetragenen Zahlenwerte sollte die Dimension der jeweiligen Größe angegeben werden.

4.9 Ein formales Beispiel für eine solche Anordnung ist in Tabelle 4.1 angegeben, die für unkorrelierte Eingangsgrößen gilt. Die dem Messergebnis beizuordnende Standardmessunsicherheit $u(y)$ unten rechts in der Tabelle ist die Wurzel aus der Quadratsumme aller Unsicherheitsbeiträge in der Spalte rechts außen. Die grau hinterlegten Zellen der Tabelle verbleiben unausgefüllt.

Tabelle 4.1: Schema einer Anordnung der Größen, Schätzwerte, Standardmessunsicherheiten, Sensitivitätskoeffizienten und Unsicherheitsbeiträge, die für die Unsicherheitsanalyse verwendet werden.

Größe X_i	Schätzwert x_i	Standard-Messunsicherheit $u(x_i)$	Sensitivitäts-Koeffizient c_i	Unsicherheits-beitrag $u_i(y)$
X_1	x_1	$u(x_1)$	c_1	$u_1(y)$
X_2	x_2	$u(x_2)$	c_2	$u_2(y)$
:	:	:	:	:
X_N	x_N	$u(x_N)$	c_N	$u_N(y)$
Y	y			$u(y)$

5 Erweiterte Messunsicherheit

5.1 In der EA ist beschlossen worden, dass von den durch EA-Mitglieder akkreditierten Kalibrierlaboratorien eine *erweiterte Messunsicherheit* U in den Kalibrierscheinen anzugeben ist, die sich aus der dem Schätzwert y der Ergebnisgröße beigeordneten Standardmessunsicherheit $u(y)$ durch Multiplikation mit einem *Erweiterungsfaktor* k ergibt:

$$U = ku(y) \tag{5.1}$$

In Fällen, in denen der Messgröße eine Normalverteilung (Gauß-Verteilung) zugeordnet werden kann und in denen die dem Schätzwert der Ergebnisgröße beigeordneten Standardmessunsicherheit ausreichend zuverlässig ist, ist standardmäßig der Erweiterungsfaktor $k = 2$ zu verwenden. Die beigeordnete erweiterte Messunsicherheit entspricht einer *Überdeckungswahrscheinlichkeit* von etwa 95 %. Diese Bedingungen werden i.a. auf Kalibrierungen zutreffen.

5.2 Die Annahme einer Normalverteilung kann nicht in jedem Falle als gegeben angesehen werden. In den Fällen jedoch, in denen mehrere (d.h. $N \geq 3$) Unsicherheitsbeiträge, die aus Wahrscheinlichkeitsverteilungen unabhängiger Größen, z.B. Normal- oder Rechteckverteilungen, gewonnen wurden, vergleichbare Beiträge zu der dem Schätzwert der Ergebnisgröße beizuordnenden Standardmessunsicherheit liefern, sind die Bedingungen des zentralen Grenzwertsatzes erfüllt, so dass in sehr guter Näherung angenommen werden kann, dass für die Ergebnisgröße eine Normalverteilung vorliegt.

5.3 Die Zuverlässigkeit der dem Schätzwert der Ergebnisgröße beizuordnenden Standardmessunsicherheit kann mit Hilfe der effektiven Freiheitsgrade (siehe Anhang E) beurteilt werden. Das Kriterium der Verlässlichkeit ist i.a. voll erfüllt, wenn keiner der Unsicherheitsbeiträge nach der Typ A Ermittlungsmethode aus weniger als zehn wiederholten Beobachtungen bestimmt wurde.

5.4 Wenn eine der genannten Bedingungen (Normalverteilung oder ausreichende Zuverlässigkeit) nicht erfüllt ist, kann sich für den Standarderweiterungsfaktor $k = 2$ eine erweiterte Messunsicherheit ergeben, die einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von weit weniger als 95 % entspricht. In diesen Fällen müssen andere Verfahren angewendet werden, um sicherzustellen, dass der Wert der erweiterten Messunsicherheit entsprechend etwa der gleichen Überdeckungswahrscheinlichkeit wie im Normalfall bestimmt wurde. Die Verwendung eines annähernd gleichen Wertes der Überdeckungswahrscheinlichkeit ist wesentlich, wenn Messergebnisse derselben Größe miteinander verglichen werden müssen, z.B. bei der Abschätzung der Ergebnisse eines Ringvergleichs oder bei der Einschätzung der Einhaltung einer Spezifikation.

5.5 Selbst wenn Normalverteilung angenommen werden kann, kann es noch passieren, dass die zu dem Ausgangsschätzwert gehörende Standardmessunsicherheit nicht ausreichend zuverlässig ist. Ist es in diesem Fall nicht möglich, die Anzahl n der wiederholten Beobachtungen zu erhöhen, noch die in dem vorliegenden Fall weniger verlässliche Typ A Ermittlungsmethode durch eine Typ B Ermittlungsmethode zu ersetzen, kann das im Anhang E angegebene Verfahren zum Einsatz kommen.

5.6 In den verbleibenden Fällen, d.h. in allen Fällen, in denen die Annahme einer Normalverteilung sicher nicht gerechtfertigt ist, muss man sich Informationen über die tatsächliche Wahrscheinlichkeitsverteilung der Werte der Ergebnisgröße verschaffen, und daraus einen Wert des Erweiterungsfaktors k bestimmen, der einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 % entspricht.

6 Angabe der Messunsicherheit in Kalibrierscheinen

6.1 In Kalibrierscheinen ist das vollständige Messergebnis, das aus dem Schätzwert y der Messgröße und der beigeordneten erweiterten Messunsicherheit U besteht, in der Form $y \pm U$ anzugeben. Diese Angabe ist mit einer Anmerkung zu versehen, die im allgemeinen Fall folgenden Inhalt haben sollte:

> Die angegebene erweiterte Messunsicherheit ist das Produkt der Standardmessunsicherheit und dem Erweiterungsfaktor $k = 2$. Sie entspricht bei einer Normalverteilung einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von etwa 95 %. Die Standardmessunsicherheit ist gemäß EAL-R2 ermittelt worden.[8]

[8] Nationale Fußnote: Der für Kalibrierlaboratorien des DKD verbindliche Text (siehe DKD-5) lautet: Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor $k = 2$ ergibt. Sie wurde gemäß DKD-3 ermittelt. Der Wert der Messgröße liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % im zugeordneten Werteintervall.

6.2 In Fällen, in denen das in Anhang E angegebene Verfahren befolgt wurde, sollte die Anmerkung wie folgt lauten:

> Die angegebene erweiterte Messunsicherheit ist das Produkt aus der Standardmessunsicherheit und dem Erweiterungsfaktor $k = \mathrm{XX}$. Sie entspricht bei einer t-Verteilung mit $\nu_{eff} = \mathrm{YY}$ effektiven Freiheitsgraden einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %. Die Standardmessunsicherheit ist gemäß EAL-R2 ermittelt worden.[9]

6.3 Der Zahlenwert der Messunsicherheit ist mit höchstens zwei signifikanten Stellen anzugeben. Der Zahlenwert des Messergebnisses ist in der abschließenden Angabe auf die letzte gültige Ziffer im Wert der dem Messergebnis beigeordneten erweiterten Messunsicherheit zu runden. Für das Rundungsverfahren sind die üblichen Regeln für das Runden von Zahlen zu verwenden (nähere Angaben zum Runden finden sich in ISO 31-0:1992, Anhang B). Nimmt der Zahlenwert der Messunsicherheit infolge der Rundung jedoch um mehr als 5 % ab, ist der aufgerundete Wert anzugeben.

7 Anweisung zur schrittweisen Bestimmung der Messunsicherheit

7.1 Im folgenden ist eine Anweisung für die schrittweise Anwendung dieses Dokuments zur Berechnung der Messunsicherheit in der Praxis zusammengestellt (siehe die ausgearbeiteten Beispiele in getrennten Ergänzungsdokumenten):

(a) Der Zusammenhang zwischen der Messgröße (Ergebnisgröße) Y und den Eingangsgrößen X_i $(i = 1,2,\ldots,N)$ der Auswertung ist entsprechend Gleichung (2.1) mathematisch zu formulieren. Im Falle eines direkten Vergleichs zweier Normale wird die Gleichung recht einfach sein, z.B. $Y = X_1 + X_2$.

(b) Alle bedeutenden Korrektionen sind festzustellen und anzuwenden.

(c) Alle Ursachen der Unsicherheit sind in einer Unsicherheitsanalyse gemäß Abschnitt 4 aufzulisten.

(d) Die Standardmessunsicherheit $u(\overline{q})$ für wiederholt gemessene Größen ist gemäß Unterabschnitt 3.2 zu bestimmen.

(e) Bei Einzelwerten, z.B. bei aus anderen, früheren Messungen resultierenden Werten, bei Korrektionen oder bei Werten aus der Literatur, ist die Standardmessunsicherheit $u(x_i)$ zu verwenden, sofern sie angegeben ist, oder gemäß Absatz 3.3.2 a) berechnet werden kann. Dabei ist darauf zu achten, in welcher Form die Messunsicherheit angegeben ist (Standardmessunsicherheit - erweiterte Messunsicherheit). Sind keine Werte verfügbar, aus denen die Standardmessunsicherheit ermittelt werden kann, ist ein Wert für $u(x_i)$ auf der Grundlage der jeweiligen messtechnischen Erfahrungen zu bestimmen.

---

[9] In diesem Fall sollte die Anmerkung im DKD-Kalibrierschein lauten:
Die angegebene erweiterte Messunsicherheit ist das Produkt aus der Standardmessunsicherheit und dem Erweiterungsfaktor k = XX. Sie entspricht bei einer t-Verteilung mit ν_{eff} = YY effektiven Freiheitsgraden einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %. Die Standardmessunsicherheit wurde gemäß DKD-3 ermittelt.

(f) Für Eingangsgrößen, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung bekannt ist oder entsprechend der vorhandenen Informationen angenommen werden kann, sind Erwartungswert x_i und Standardmessunsicherheit $u(x_i)$ nach Absatz 3.3.2 b) zu berechnen. Wenn nur Ober- und Untergrenzen der Unbestimmtheit oder Variabilität der Eingangsgröße bekannt sind oder geschätzt werden können, ist die Standardmessunsicherheit $u(x_i)$ gemäß Absatz 3.3.2 c) zu ermitteln.

(g) Für jede Eingangsgröße X_i ist der Beitrag $u_i(y)$ zur Messunsicherheit zu berechnen, die dem Schätzwert y der Ergebnisgröße beizuordnen ist. Er ergibt sich gemäß den Gleichungen (4.2) und (4.3) aus der dem Schätzwert x_i der Eingangsgröße beigeordneten Standardmessunsicherheit $u(x_i)$ durch Multiplikation mit dem Sensitivitätskoeffizienten c_i. Die Quadrate der Unsicherheitsbeiträge sind gemäß Gleichung (4.1) zu summieren, um das Quadrat der Standardmessunsicherheit $u(y)$ zu erhalten, die dem Wert der Messgröße beizuordnen ist. Ist von den Eingangsgrößen bekannt, dass sie korreliert sind, ist das in Anhang D angegebene Verfahren anzuwenden.

(h) Die erweiterte Messunsicherheit U ist durch Multiplikation der dem Schätzwert der Ergebnisgröße beigeordneten Standardmessunsicherheit $u(y)$ mit einem gemäß Abschnitt 5 gewählten Erweiterungsfaktor k zu bestimmen.

(i) Das Ergebnis der Messung, das den Schätzwert y der Messgröße, die beigeordnete erweiterte Messunsicherheit U und den Erweiterungsfaktor k umfasst, ist im Kalibrierschein gemäß Abschnitt 6 anzugeben.

8 Literatur

[1] Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen
(Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement),
1. Aufl. 1993, Überarbeitung und Nachdruck 1995, International Organization for Standardization (Genf, Schweiz).

[2] Internationales Wörterbuch der Metrologie
(International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology),
2. Aufl. 1993, International Organization for Standardization (Genf, Schweiz).

[3] Internationale Norm ISO 3534-1
Statistik - Vokabular und Formelzeichen - Teil I: Wahrscheinlichkeits- und allgemeine statistische Begriffe
(Statistics - Vocabulary and Symbols - Part I: Probability and general statistical terms),
1. Aufl. 1993, International Organization for Standardization (Genf, Schweiz).

Anhang A
Anmerkungen zur Festlegung der kleinsten angebbaren Messunsicherheit[10]

A1 Die kleinste angebbare Messunsicherheit (siehe Abschnitt 1 des Haupttextes) ist einer der Parameter, die für die Festlegung des *Akkreditierungsumfangs* eines akkreditierten Kalibrierlaboratoriums verwendet werden; weitere Parameter sind die physikalische Größe, das Kalibrierverfahren oder der zu kalibrierende Gerätetyp und der Messbereich. Die kleinste angebbare Messunsicherheit wird normalerweise in der *Anlage zur Akkreditierungsurkunde* oder in anderen Unterlagen angegeben, die der *Akkreditierungsentscheidung* zugrunde liegen bzw. der *Akkreditierungsurkunde* beigefügt sind, die als Nachweis für die Akkreditierung ausgestellt wird. Gelegentlich wird sie sowohl in der Anlage zur Akkreditierungsurkunde als auch in den unterstützenden Unterlagen angegeben. Die kleinste angebbare Messunsicherheit ist eine der wesentlichen Informationen, die in den Verzeichnissen der akkreditierten Laboratorien aufgeführt sind, die regelmäßig von den Akkreditierungsstellen herausgegeben werden und von möglichen Kunden der akkreditierten Laboratorien benutzt werden, um die Eignung eines Laboratoriums für die Durchführung einer bestimmten Kalibrieraufgabe im Laboratorium oder vor Ort zu beurteilen.

A2 Um einen Vergleich zwischen den von verschiedenen Akkreditierungsstellen akkreditierten Kalibrierlaboratorien erzielten Messunsicherheiten zu ermöglichen, müssen die Angaben über die kleinste angebbare Messunsicherheit aneinander angeglichen werden. Zur Erleichterung sind weiter unten einige Erklärungen zum Begriff "kleinste angebbare Messunsicherheit" auf der Grundlage der im Haupttext angegebenen Definition zusammengestellt.

A3 Mit "mehr oder weniger routinemäßigen Kalibrierungen" ist gemeint, dass das Laboratorium die angegebene Messunsicherheit im Rahmen seiner *normalen* Arbeit, die es im Rahmen seiner Akkreditierung durchführt, erreichen können muss. Es gibt offensichtlich Fälle, in denen das Laboratorium aufgrund weitreichender Untersuchungen und zusätzlicher Maßnahmen mehr leisten könnte, aber diese Fälle werden nicht durch die Definition der kleinsten angebbaren Messunsicherheit abgedeckt, es sei denn, dass das Laboratorium offen das Ziel verfolgt, solche mehr wissenschaftlichen Untersuchungen durchzuführen (wodurch diese Untersuchungen dann zu "mehr oder weniger routinemäßigen" Kalibrierungen des Laboratoriums werden).

A4 Der Ausdruck "fast ideal" in der Definition bedeutet, dass die kleinste angebbare Messunsicherheit nicht von den Merkmalen des zu kalibrierenden Geräts abhängig sein sollte. Der Begriff "fast ideal" beschreibt somit den Fall, dass keine wesentlichen Unsicherheitsbeiträge auf physikalische Effekte zurückzuführen sein sollten, die etwaigen Unvollkommenheiten des zu kalibrierenden Gerätes zugeschrieben werden müssen. Es versteht sich jedoch von selbst, dass ein "fast ideales" Gerät auch verfügbar sein muss. Wenn nachgewiesen werden kann, dass in einem bestimmten Fall selbst das "idealste" verfügbare Gerät diesem Konzept nicht entspricht, ist der aus dem Gerät resultierende Unsicherheitsbeitrag bei der Ermittlung der kleinsten angebbaren Messunsicherheit mit einzubeziehen. Es ist in diesem Falle auch anzugeben, dass sie sich auf die Kalibrierung dieses speziellen Gerätetyps bezieht.

[10] Nationale Fußnote: s. Fußnote 3 auf Seite 4

A5 Die Definition der kleinsten angebbaren Messunsicherheit beinhaltet, dass ein Laboratorium im Rahmen *seiner Akkreditierung* nicht berechtigt ist, eine geringere Messunsicherheit als die kleinste angebbare Messunsicherheit für seine routinemäßigen Kalibrierungen anzugeben. Das bedeutet, dass das Laboratorium eine größere Messunsicherheit angeben muss, wenn feststeht, dass der tatsächlich durchgeführte Kalibriervorgang wesentlich zur Messunsicherheit beiträgt. Typischerweise wird dabei das zu kalibrierende Gerät einen deutlichen Beitrag liefern. Offensichtlich kann die in Kalibrierscheinen *jeweils angegebene* Messunsicherheit nie kleiner als die kleinste angebbare Messunsicherheit sein. Das Laboratorium ist aufgefordert, die Grundsätze dieses Dokuments bei der Angabe der jeweiligen Messunsicherheit anzuwenden.

A6 Es wird darauf hingewiesen, dass der Begriff der kleinsten angebbaren Messunsicherheit nur bei jenen Ergebnissen in Betracht gezogen werden muss, bei denen das Laboratorium Messergebnisse als akkreditiertes Laboratorium weitergibt. Genau genommen ist der Begriff daher ein verwaltungstechnischer Terminus und braucht die realen technischen Messmöglichkeiten des Laboratoriums nicht unbedingt widerzuspiegeln. Jedes Laboratorium kann die Akkreditierung mit einer größeren als der ihm technisch möglichen Messunsicherheit beantragen, wenn interne Gründe vorliegen[11]. Zu den Gründen zählen gewöhnlich die Fälle, in denen die erzielbaren Messunsicherheiten gegenüber Kunden vertraulich behandelt werden müssen, z.B. bei Forschungs- und Entwicklungsarbeiten oder wenn Dienstleistungen für besondere Kunden erbracht werden. Der Grundsatz der Akkreditierungsstelle sollte es sein, die Akkreditierung auf jeder beantragten Ebene zu gewähren, sofern das Laboratorium Kalibrierungen auf der entsprechenden Ebene durchführen kann. (Diese Überlegung bezieht sich nicht nur auf die kleinste angebbare Messunsicherheit, sondern auf alle Parameter, die den Aufgabenbereich eines Kalibrierlaboratoriums festlegen.)

A7 Es ist Aufgabe der Akkreditierungsstelle, die kleinste angebbare Messunsicherheit zu bestätigen. Mit Ausnahme des im vorhergehenden Unterabschnitt behandelten Falles sollte die Bestimmung der kleinsten angebbaren Messunsicherheit an Hand des in diesem Dokument dargelegten Verfahrens erfolgen. Sie ist in der gleichen Weise anzugeben wie die jeweilige Messunsicherheit in Kalibrierscheinen, d.h. in Form einer erweiterten Messunsicherheit, normalerweise mit dem Erweiterungsfaktor $k = 2$. (Nur in den Ausnahmefällen, in denen eine Normalverteilung nicht angenommen werden kann oder die Festlegung auf einer zu begrenzten Anzahl von Daten beruht, ist die kleinste angebbare Messunsicherheit unmittelbar bezogen auf eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 % anzugeben. Nähere Erläuterungen finden sich in Abschnitt 5 des Haupttextes.)

A8 Alle Komponenten, die wesentlich zur Messunsicherheit beitragen, müssen bei der Ermittlung der kleinsten angebbaren Messunsicherheit berücksichtigt werden. Für die Ermittlung der Beiträge, von denen bekannt ist, dass sie zeitlichen Änderungen unter-

[11] Nationale Fußnote: Die realen messtechnischen Möglichkeiten können unter besonderen Messbedingungen, die bei routinemäßigen Kalibrierungen aus zeitlichen oder wirtschaftlichen Gründen nicht eingehalten werden können, wesentlich besser sein. Für Kalibrierungen ist das belanglos, da sich die Akkreditierung und damit die Angabe der kleinsten angebbaren Messunsicherheit auf “mehr oder weniger routinemäßige Kalibrierungen“ bezieht.

worfen sind oder sich in Abhängigkeit von einer anderen physikalischen Größe ändern, können Grenzen möglicher Änderungen festgelegt werden, von denen angenommen wird, dass sie unter normalen Arbeitsbedingungen eingehalten werden. Wenn z.B. bekannt ist, dass das verwendete Gebrauchsnormal einer Drift unterworfen ist, muss der Beitrag, der durch die Drift zwischen aufeinanderfolgenden Kalibrierungen verursacht wird, bei der Ermittlung des vom Gebrauchsnormal herrührenden Unsicherheitsbeitrages berücksichtigt werden.

A9 In einigen Bereichen kann die Messunsicherheit von einem zusätzlichen Parameter abhängen, wie z.B. der Frequenz der angelegten elektrischen Spannung bei der Kalibrierung von Normalwiderständen. Zusätzliche Parameter dieser Art sind zusammen mit der Messgröße und der für die zusätzlichen Parameter spezifizierten kleinsten angebbaren Messunsicherheit anzugeben. Das wird häufig so geschehen, dass die kleinste angebbare Messunsicherheit als Funktion des betreffenden Parameters angegeben wird.

A10 Die kleinste angebbare Messunsicherheit ist normalerweise zahlenmäßig anzugeben. Sofern sie eine Funktion der Messgröße (oder eines anderen Parameters) ist, auf die sie sich bezieht, kann sie auch in analytischer Form angegeben werden. Im letzten Fall kann ein zusätzliches Diagramm den Verlauf oft noch anschaulicher machen. Es muss stets eindeutig ersichtlich sein, ob die kleinste angebbare Messunsicherheit als absoluter oder relativer Wert angegeben ist. (Gewöhnlich liefert die Angabe der zugehörigen Einheit die erforderliche Erklärung, bei Größen der Dimension 1 ist jedoch immer eine getrennte Angabe erforderlich.)

A11 Obwohl die Festlegung nach den in diesem Dokument genannten Verfahren vorzunehmen ist, enthält der Haupttext die klare Forderung, dass die Festsetzung normalerweise durch einen experimentellen Nachweis zu stützen oder zu bestätigen ist. Diese Anforderung bedeutet, dass sich die Akkreditierungsstelle nicht allein mit einer Berechnung der Messunsicherheit begnügen sollte. Unter ihrer Aufsicht oder in ihrem Auftrag sind vielmehr Ringvergleiche durchzuführen, die die Berechnungen stützen.

Anhang B
Glossar

B1 **arithmetischer Mittelwert** ([3] Definition 2.26)
Summe der Werte geteilt durch die Anzahl der Werte.

B2 **kleinste angebbare Messunsicherheit** (Abschnitt 1)
kleinste Messunsicherheit, die ein Laboratorium für eine spezifische Größe unter idealen Messbedingungen im Rahmen seiner Akkreditierung erreichen kann.

B3 **Korrelation** ([3], Definition 1.13)
Beziehung zwischen zwei oder mehreren Zufallsvariablen in einer Verteilung von zwei oder mehreren Zufallsvariablen.

B4 **Korrelationskoeffizient** ([1] Abschnitt C.3.6)
relatives Maß der gegenseitigen Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen, das gleich dem Verhältnis der Kovarianz der beiden Zufallsvariablen zum Produkt der positiven Quadratwurzeln ihrer Varianzen ist.

B5 **Kovarianz** ([1] Abschnitt C.3.4)
Maß der gegenseitigen Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen, das gleich dem Erwartungswert des Produktes der Abweichung der beiden Zufallsvariablen von ihren Erwartungswerten ist.

B6 **Erweiterungsfaktor** ([1] Definition 2.3.6)
Zahlenfaktor, mit dem die Standardmessunsicherheit zu multiplizieren ist, um die erweiterte Messunsicherheit zu erhalten.

B7 **Überdeckungswahrscheinlichkeit** ([1] Abschnitt 2.3.5)
ein i.a. großer Anteil der Verteilung der Werte, die auf Grund einer Messung der jeweiligen Messgröße vernünftigerweise als Ergebnis der Messung zugeschrieben werden kann.

B8 **empirische Standardabweichung** ([2] Definition 3.8)
positive Quadratwurzel der empirischen Varianz.

B9 **empirische Varianz** ([1] Abschnitt 4.2.2)
Größe, die das Quadrat der Streuung der Werte in einer Reihe von n Beobachtungen einer bestimmten Messgröße charakterisiert, gegeben durch Gleichung (3.2) im Text.

B10 **erweiterte Messunsicherheit** ([1] Definition 2.3.5)
Größe, die einen Bereich um den Messwert kennzeichnet, der erwartungsgemäß einen großen Anteil der Verteilung der Werte umfasst, die der Messgröße durch eine Messung vernünftigerweise als Ergebnis der Messung zugeschrieben werden können.

B11 **Schätzwert einer Eingangsgröße** ([1] Abschnitt 4.1.4)
Messwert, der einer Eingangsgröße als bester Wert zugeschrieben wird und der bei der Ermittlung des Messergebnisses benutzt wird.

B12 **Eingangsgröße** ([1] Abschnitt 4.1.2)
Größe, von der die Messgröße abhängt und die bei der Ermittlung des Ergebnisses der Messung berücksichtigt wird.

B13 **Messgröße** ([2] Definition 2.6)
spezielle Größe, der die Messung gilt.

B14 Schätzwert der Ergebnisgröße ([1] Abschnitt 4.1.4)
Messergebnis, das der Messgröße bei einer Messung zugeschrieben und das mit der Modellfunktion der Auswertung aus den Eingangsschätzwerten berechnet wird.

B15 Ergebnisgröße ([1] Abschnitt 4.1.4)
Größe, die die Messgröße bei der Auswertung einer Messung darstellt.

B16 zusammengefasster Schätzwert der Varianz ([1] Abschnitt 4.2.4)
empirische Varianz, die aus einer großen Reihe von Beobachtungen der gleichen Messgröße in einem wohl-definierten Messverfahren unter statistischer Kontrolle ermittelt wird.[12]

B17 Wahrscheinlichkeitsverteilung ([3] Definition 1.3)
Funktion, die die Wahrscheinlichkeit angibt, dass eine Zufallsvariable einen bestimmten Wert oder einen Wert aus einem bestimmten Bereich annimmt.

B18 Zufallsvariable ([3] Definition 1.2)
Größe, die jeden Wert aus einem gegebenen Bereich annehmen kann und zu der eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gehört.

B19 relative Standardmessunsicherheit ([1] Abschnitt 5.1.6)
Standardmessunsicherheit einer Messgröße dividiert durch den Betrag des Schätzwertes der Messgröße.

B20 Sensitivitätskoeffizient zu einem Eingangschätzwert ([1] Abschnitt 5.1.3)
differentielle Änderung des Ausgangsschätzwertes bei einer differentiellen Änderung eines Eingangsschätzwertes dividiert durch die Änderung des Eingangsschätzwertes.

B21 Standardabweichung ([3] Definition 1.23)
positive Quadratwurzel der Varianz einer Zufallsvariablen.

B22 Standardmessunsicherheit ([1] Definition 2.3.1)
dem Schätzwert beizuschreibende, d.h. mit dem Schätzwert anzugebende Messunsicherheit, ausgedrückt als Standardabweichung.

B23 Ermittlungsmethode A ([1] Definition 2.3.2)
Methode, bei der die Messunsicherheit aus der statistischen Analyse einer Beobachtungsreihe gewonnen wird.

B24 Ermittlungsmethode B ([1] Definition 2.3.3)
Methode, bei der die Messunsicherheit nicht aus der statistischen Analyse einer Beobachtungsreihe ermittelt wird.

B25 Messunsicherheit ([2] Definition 3.9)
Kennwert, der zusammen mit dem Messergebnis angegeben wird, d.h. dem Messergebnis durch die Messung beigeordnet wird, und den Bereich der Werte charakterisiert, die der Messgröße durch die Messung vernünftigerweise zugeschrieben werden können.

B26 Varianz ([3] Definition 1.22)
Erwartungswert des Quadrates der Abweichung einer Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert.

[12] Nationale Fußnote: Die zur Bestimmung der Varianz herangezogenen Beobachtungen müssen eindeutig die gleiche Messgröße festlegen, die Bedingungen müssen identisch sein (Wiederholbedingungen) und die in den einzelnen Messungen ermittelte Streuung der beobachteten Werte muss allein statistischen Ursachen zuzuschreiben sein.

Anhang C
Quellen der Messunsicherheit

C1 Die Unsicherheit eines Messergebnisses spiegelt die nicht vollständige Kenntnis über den Wert der Messgröße wider. Die vollständige Kenntnis erfordert eine unendliche Menge an Informationen. Phänomene, die zu der Unsicherheit und damit zu der Tatsache beitragen, dass das Ergebnis einer Messung nicht durch einen einzelnen Wert gekennzeichnet werden kann, werden Quellen der Unsicherheit genannt[13]. In der Praxis gibt es bei einer Messung viele mögliche Quellen der Unsicherheit [1], u.a. die folgenden:

(a) die unvollständige Definition der Messgröße,

(b) die unvollkommene Realisierung der Definition der Messgröße,

(c) die nicht repräsentative Stichprobennahme, d.h. die in der Messung verwendete Probe stellt die definierte Messgröße nur mit einer gewissen Näherung dar,

(d) eine nicht ausreichende Kenntnis über den Einfluss der Umgebungsbedingungen oder die unvollkommenen Messungen dieser Effekte,

(e) die persönlichen Einflüsse bei der Ablesung von Analoggeräten,

(f) die endliche Auflösung oder die Ansprechschwelle von Nachweisgeräten,

(g) nicht exakt bekannte Werte der Normale und Referenzmaterialien,

(h) nicht exakt bekannte Werte von Konstanten und anderen Parametern, die aus externen Quellen entnommen und bei der Auswertung benutzt werden,

(i) vereinfachende Näherungen und Annahmen, die im Messprinzip oder im Messverfahren verwendet werden,

(j) die Streuung der Werte wiederholter Beobachtungen einer Messgröße unter offenbar gleichen Bedingungen.

C2 Diese Quellen treten nicht immer unabhängig voneinander auf. Einige der Quellen (a) bis (i) können gemeinsam zu (j) beitragen.

[13] Nationale Fußnote: Präziser formuliert wird in einer Messung eine Größe konstruiert, deren Wert aus den Bedingungen der Messung ermittelt und der Messgröße als Ergebnis der Messung zugeordnet wird. Die Unsicherheit beschreibt, inwieweit die während der Messung gewonnenen oder in die Messung einfließenden, nicht-vollkommenen Kenntnisse die konstruierte Größe bzw. die Zuordnung ihres ermittelten Wertes an die Messgröße beeinflussen.

Anhang D
Korrelierte Eingangsgrößen

D1 Wenn von zwei Eingangsgrößen X_i und X_k bekannt ist, dass sie zu einem gewissen Grade korreliert sind - d.h. wenn sie auf die eine oder andere Weise voneinander abhängig sind -, ist die mit den beiden Schätzwerten x_i und x_k verbundene *Kovarianz*

$$u(x_i, x_k) = u(x_i)u(x_k)r(x_i, x_k) \qquad (i \neq k) \tag{D.1}$$

als zusätzlicher Beitrag in der Messunsicherheit zu berücksichtigen. Der Grad der Korrelation wird durch den *Korrelationskoeffizienten* $r(x_i, x_k)$ ($i \neq k$ und $|r| \leq 1$) bestimmt.

D2 Im Falle von n Paaren unabhängig wiederholter Beobachtungen zweier Größen P und Q ist die den arithmetischen Mittelwerten $\overline{p}$ und $\overline{q}$ beizuordnende Kovarianz gegeben durch

$$s(\overline{p}, \overline{q}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} (p_j - \overline{p})(q_j - \overline{q}) \tag{D.2}$$

Hieraus ergibt sich der Korrelationskoeffizient r durch Substitution in Gleichung (D.1).

D3 Bei den Einflussgrößen können Korrelationen aus der jeweiligen messtechnischen Erfahrung und allgemeinen Kenntnissen über das Messverfahren begründet werden. Sofern für Korrelation zwischen den Eingangsgrößen entsprechende Kovarianzen bekannt sind oder abgeschätzt werden können, ist Gleichung (4.1) durch

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} c_i c_k u(x_i, x_k) \tag{D.3}$$

wo c_i und c_k die in Gleichung (4.3) definierten Sensitivitätskoeffizienten sind, oder durch

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y) + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} u_i(y) u_k(y) r(x_i, x_k) \tag{D.4}$$

zu ersetzen, wo sich die Beiträge $u_i(y)$ zur Standardmessunsicherheit, die dem Schätzwert y der Ergebnisgröße beizuordnen sind, nach Gleichung (4.2) aus der Standardmessunsicherheit ergeben, die mit dem Schätzwert x_i der Eingangsgrößen angegeben werden. Es ist zu beachten, dass die zweite Summation in den Gleichungen (D.3) oder (D.4) u.U. einen negativen Wert liefern kann.

D4 In der Praxis sind Eingangsgrößen oft korreliert, weil für die Ermittlung ihrer Werte dieselben, durch eine erhebliche Messunsicherheit gekennzeichneten, physikalischen Bezugsnormale, Messgeräte, Bezugsgrößen oder Messverfahren verwendet werden. Nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit an, dass die beiden Eingangsgrößen X_1 und X_2 mit den Schätzwerten x_1 und x_2 von den untereinander unabhängigen Variablen Q_l $(l = 1,2,..,L)$ abhängen:

$$X_1 = g_1(Q_1, Q_2, .., Q_L)$$
$$X_2 = g_2(Q_1, Q_2, .., Q_L) \qquad \text{(D.5)}$$

wobei nicht unbedingt alle Variablen $Q_l\,(l = 1,2,..,L)$ in beiden Funktionen zugleich auftreten müssen. Die Schätzwerte x_1 und x_2 der Eingangsgrößen sind zu einem gewissen Grade korreliert, selbst wenn die Schätzwerte $q_l\,(l = 1,2,..,L)$ unkorreliert sind. Die den Schätzwerten x_1 und x_2 beigeordnete Kovarianz $u(x_1, x_2)$ ist gegeben durch

$$u(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^{L} c_{1l} c_{2l} u^2(q_l) \qquad \text{(D.6)}$$

Hier sind c_{1l} und c_{2l} aus den Funktionen g_1 und g_2 analog zu Gleichung (4.3) abgeleitete Sensitivitätskoeffizienten. Da nur Glieder zu der Summe beitragen, deren Sensitivitätskoeffizienten von Null verschieden sind, ist die Kovarianz Null, wenn die Funktionen g_1 und g_2 keine gemeinsame Variable besitzen. Der Korrelationskoeffizient $r(x_1, x_2)$ für die Schätzwerte x_1 und x_2 wird aus Gleichung (D.6) zusammen mit Gleichung (D.1) ermittelt.

D5 Im folgenden Beispiel werden allgemein die Korrelationen zwischen den Werten bestimmt, die bei der Kalibrierung zweier Arbeitsnormale mit demselben Bezugsnormal auftreten können.

Messproblem

Die beiden Normale, die die Größen X_1 und X_2 darstellen, werden mit Hilfe eines Messsystems an das Bezugsnormal, das die Größe Q_S realisiert, angeschlossen. Mit dem Messsystem wird jeweils die Differenz z zwischen den realisierten Werten eines der Normale und dem Bezugsnormal mit einer Standardmessunsicherheit $u(z)$ ermittelt. Der Wert q_S selbst ist mit der Standardmessunsicherheit $u(q_S)$ bekannt.

Mathematisches Modell

Das Modell der Auswertung[14] setzt die Größen X_1 und X_2 der beiden Normale in Beziehung zu der Größe Q_S des Bezugsnormales und den Abweichungen Z_1 und Z_2

$$X_1 = Q_S - Z_1$$
$$X_2 = Q_S - Z_2 \qquad \text{(D.7a)}$$

Die Schätzwerte x_1 und x_2 sind abhängig vom Wert q_S des Bezugsnormals und den beobachteten Differenzen z_1 und z_2 gemäß den Beziehungen

$$x_1 = q_S - z_1$$
$$x_2 = q_S - z_2 \qquad \text{(D.7b)}$$

[14] Nationale Fußnote: In der deutschen Übersetzung ist abweichend vom engl. Original das Modell der Auswertung als Gleichung (D.7a) eingefügt worden, um den Unterschied zwischen den Größen und ihren Werten klarer hervorzuheben, auch wenn die Form der Größengleichung (D.7a) sich nicht wesentlich von der Gleichung der Werte (D.7b) unterscheidet.

Standardmessunsicherheiten und Kovarianzen
Die Schätzwerte z_1, z_2 und q_S werden als unkorreliert angenommen, weil sie in verschiedenen Messungen ermittelt wurden. Die Standardmessunsicherheiten werden aus Gleichung (4.4) berechnet, und die den Schätzwerten x_1 und x_2 beigeordnete Kovarianz ergibt sich aus Gleichung (D.6) unter der Annahme, dass $u(z_1) = u(z_2) = u(z)$ ist:

$$\begin{aligned} u^2(x_1) &= u^2(q_S) + u^2(z) \\ u^2(x_2) &= u^2(q_S) + u^2(z) \\ u(x_1, x_2) &= u^2(q_S) \end{aligned} \tag{D.8}$$

Der aus diesen Ergebnissen abgeleitete Korrelationskoeffizient ist

$$r(x_1, x_2) = \frac{u^2(q_S)}{u^2(q_S) + u^2(z)} \tag{D.9}$$

In Abhängigkeit von dem Verhältnis zwischen den Standardmessunsicherheiten $u(q_S)$ und $u(z)$ reicht sein Wert von 0 bis +1.

D6 Der durch Gleichung (D.5) beschriebene Fall ist einer der Fälle, in denen die direkte Berücksichtigung der Korrelation bei der Ermittlung der Standardmessunsicherheit der Messgröße durch eine geeignete Wahl der Modellfunktion vermieden werden kann. Wird nämlich eine neue Modellfunktion benutzt, die die unabhängigen Variablen Q_l direkt enthält, indem die ursprünglichen Variablen X_1 und X_2 in der ursprünglichen Modellfunktion f entsprechend den Transformationsgleichungen (D.5) ersetzt werden, so treten die korrelierten Variablen X_1 und X_2 in der neuen Modellfunktion und damit die Korrelationen zwischen ihnen nicht mehr auf.

D7 Es gibt jedoch Fälle, in denen Korrelation zwischen zwei Eingangsgrößen X_1 und X_2 nicht vermieden werden kann, wenn z.B. dasselbe Messgerät oder dasselbe Bezugsnormal bei der Ermittlung der Eingangsschätzwerte x_1 und x_2 verwendet wird, Gleichungen für die Transformation in neue unabhängige Variablen aber nicht verfügbar sind. Ist jedoch der Grad der Korrelation nicht bekannt, kann es hilfreich sein, den maximalen Einfluss, den diese Korrelation haben kann, durch eine obere Grenze der der Messgröße beizuordnenden Standardmessunsicherheit abzuschätzen. Sie hat - wenn weitere Korrelationen nicht berücksichtigt werden müssen - die Form

$$u^2(y) \leq \left(|u_1(y)| + |u_2(y)|\right)^2 + u_r^2(y) \tag{D.10}$$

wobei $u_r(y)$ der Beitrag zur Standardmessunsicherheit aller verbleibenden Eingangsgrößen ist, die als unkorreliert zu den beiden Eingangsgrößen X_1 und X_2 angenommen werden.[15]

[15] Nationale Fußnote: Gleichung (D.10) kann relativ einfach auf Fälle ausgedehnt werden, die eine oder mehrere Gruppen mit zwei oder mehr korrelierten Eingangsgrößen behandeln. In diesem Fall ist für jede Gruppe korrelierter Größen das Quadrat einer entsprechenden Summe für den ungünstigsten Fall in Gleichung (D.10) einzuführen.

Anhang E
Aus effektiven Freiheitsgraden abgeleitete Erweiterungsfaktoren

E1 Die Festlegung eines Erweiterungsfaktors k, der einer bestimmten Überdeckungswahrscheinlichkeit entspricht, erfordert, dass die Verlässlichkeit der Standardmessunsicherheit $u(y)$, die dem Schätzwert y der Ergebnisgröße beigeordnet ist, in Betracht gezogen wird. Das bedeutet, dass berücksichtigt wird, wie gut die mit dem Messergebnis verbundene Standardabweichung durch $u(y)$ geschätzt wird. Bei der Schätzung der Standardabweichung einer Normalverteilung sind die Freiheitsgrade des Schätzwertes, die vom Umfang der jeweiligen Stichprobe abhängen, ein Maß für die Verlässlichkeit. Ein geeignetes Maß für die Verlässlichkeit der einem Schätzwert der Ergebnisgröße beigeordneten Standardmessunsicherheit bildet in analoger Weise der zugehörige effektive Freiheitsgrad ν_{eff}. Sofern die Voraussetzungen des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitstheorie erfüllt sind, ist der zum Messergebnis gehörende effektive Freiheitsgrad in guter Näherung durch eine Kombination der effektiven Freiheitsgrade der verschiedenen Unsicherheitsbeiträge $u_i(y)$ gegeben.

E2 Liegen die Bedingungen für die Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes vor, so umfasst das Verfahren zur Berechnung eines Erweiterungsfaktors k die folgenden drei Schritte:

(a) Ermittlung der dem Schätzwert der Ergebnisgröße beigeordneten Standardmessunsicherheit nach dem in Abschnitt 7 angegebenen Verfahren der schrittweisen Bestimmung.

(b) Abschätzung der effektiven Freiheitsgrade ν_{eff}, die zu der Standardmessunsicherheit $u(y)$ gehören mit Hilfe der Welch-Satterthwaite-Formel

$$\nu_{\mathrm{eff}} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \quad . \tag{E.1}$$

Hierin sind $u_i(y) \quad (i = 1,2,\ldots,N)$ die in Gleichung (4.2) definierten Beiträge zur Standardmessunsicherheit, denen das Messergebnis y beizuordnen ist und die sich aus den Messunsicherheiten ergeben, die den als statistisch unabhängig vorausgesetzten Schätzwerten x_i der Eingangsgrößen beigeordnet sind, und ν_i die effektiven Freiheitsgrade der Unsicherheitsbeiträge $u_i(y)$.

Für einen Wert der Standardmessunsicherheit $u_i(\overline{q})$, der nach der Ermittlungsmethode A gemäß Unterabschnitt 3.1 bestimmt wurde, ist der Freiheitsgrad durch $\nu_i = n-1$ gegeben. Die Festlegung der Freiheitsgrade, die zu einem nach der Ermittlungsmethode B bestimmten Wert der Standardmessunsicherheit $u(x_i)$ gehört, erfordert demgegenüber in jedem Einzelfall eine genauere Überlegung. Dabei ist zu berücksichtigen, dass es allgemein üblich ist, Abschätzungen des Unbestimmtheits- oder Variabilitätsbereiches so durchzuführen, dass Unterschätzungen vermieden werden. Werden z.B. Unter- und Obergrenzen a_- und a_+ festgelegt, so werden sie gewöhnlich so gewählt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die betreffende Größe außerhalb dieser Grenzen liegt, sehr klein ist. Unter dieser Annahme können die Freiheitsgrade der nach der Ermittlungsmethode B bestimmten Standardmessunsicherheit $u(x_i)$ mit $\nu_i \to \infty$ angenommen werden.

(c) Bestimmung des Erweiterungsfaktors k aus der Tabelle, die in diesem Anhang als Tabelle E.1 enthalten ist. Diese Tabelle fußt auf einer t-Verteilung, die für eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95,45 % ermittelt wurde. Ist ν_{eff} keine ganze Zahl, was gewöhnlich der Fall ist, so ist ν_{eff} auf die nächst niedrigere ganze Zahl abzurunden.

Tabelle E.1: Erweiterungsfaktoren k für verschiedene effektive Freiheitsgrade ν_{eff}

ν_{eff}	1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	50	∞
k	13,97	4,53	3,31	2,87	2,65	2,52	2,43	2,37	2,28	2,13	2,05	2,00